

inecuación no tiene solución.

$$e) \quad x(x+2) > -(7+x)$$

$$x^2 + 2x > -7 - x$$

$$x^2 + 3x + 7 > 0$$

Es imposible descomponer en factores puesto que el discriminante $D = -19 < 0$, luego como el signo de a (coeficiente de x^2) es positivo, el trinomio lo es también y además la desigualdad dada coincide con este signo (> 0), entonces la solución es $x \in \mathbb{R}$. ■

Debes tener en cuenta que la afirmación anterior sólo es válida para polinomios de grado par.

Las *inecuaciones fraccionarias* son aquellas en las que la incógnita aparece en algún denominador.

Para resolver estas inecuaciones debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- Transformar la inecuación algebraicamente hasta que resulte un cociente comparado con cero $\left(\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ ó } \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \right)$

- Descomponer en factores tanto el numerador como el denominador del cociente y simplificar, si es posible.

En los ceros de cada uno de los factores obtenidos, si esos factores no aparecen elevados a un exponente par, es donde cambia de signo el cociente.

- Reflexionar mediante las reglas de los signos en el producto, cómo debe ser el signo de los factores para que el cociente sea mayor (menor) que cero. Cuando son muchos factores es conveniente representar ordenadamente, en un eje numérico los ceros del numerador y los del denominador y analizar el signo del cociente en cada uno de los intervalos determinados por los ceros.

Esto último hay que hacerlo teniendo en cuenta que hay factores con signo constante o que se simplifican.

- Tener en cuenta, para la respuesta, el dominio de definición del término (cuando se simplifican factores hay que excluir del dominio y, por tanto, de la respuesta los ceros de esos factores que se simplifican) y si la desigualdad es estricta o no.

Ejemplo 3

Resuelve las siguientes desigualdades:

a) $\frac{x+3}{x-1} \geq 0$

b) $\frac{x^2+2x-8}{x+1} < 0$

c) $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-3x-10} \geq 0$

d) $\frac{x^3+4x^2-5x}{x^2+7x+10} < 0$

e) $x-10 \leq -\frac{36x-180}{x^2-3x-10}$

Resolución

a) $\frac{x+3}{x-1} \geq 0$

ceros del
numerador

ceros del
denominador

$$\begin{aligned} x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

analicemos el signo de la fracción (fig. 16)



Fig. 16

Respuesta: $x \leq -3$ ó $x > 1$

b) $\frac{x^2+2x-8}{x-1} < 0$

$$\frac{(x+4)(x-2)}{x-1} < 0$$

descomponiendo en factores
el numerador

ceros del
numerador

ceros del
denominador

$$\begin{aligned} x+4 &= 0 & x-2 &= 0 \\ x &= -4 & x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Análisis del signo de la fracción (fig. 17)



Fig. 17

Respuesta: $(-\infty; -4) \cup (-1; 2)$

c) $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-3x-10} \geq 0$

$$\frac{x(x^2-6x+9)}{(x-5)(x+2)} \geq 0$$

descomponiendo en factores el
numerador y el denominador

$$\frac{x(x-3)^2}{(x-5)(x+2)} \geq 0$$

ceros del
numerador

$x = 0$; En $x = 3$ no hay cambio de signo por estar $x - 3$ elevado al cuadrado.

ceros del
denominador

$$\begin{array}{ll} x - 5 = 0 & x + 2 = 0 \\ x = 5 & x = -2 \end{array}$$

Análisis del signo de la fracción (fig. 18)



Fig. 18

Respuesta: $-2 < x \leq 0$ ó $x > 5$

d) $\frac{x^3 + 4x - 5x}{x^2 + 7x + 10} < 0$

$$\frac{x(x^2 + 4x - 5)}{(x + 5)(x + 2)} < 0$$

$$\frac{x(x + 5)(x - 1)}{(x + 5)(x + 2)} < 0$$

$$\frac{x(x - 1)}{x + 2} < 0$$

ceros del
numerador

$$\begin{array}{ll} x = 0 & x - 1 = 0 \\ & x = 1 \end{array}$$

ceros del
denominador

$$\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x = -2 \end{array}$$

Análisis del signo de la fracción (fig. 19)

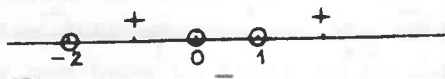


Fig. 19

Como hubo simplificación hay que eliminar de la respuesta el cero correspondiente al factor que se simplificó (-5), luego la respuesta es:

$$x < -2, x \neq -5 \text{ ó } 0 < x < 1$$

$$e) \quad x - 10 \leq -\frac{36x - 180}{x^2 - 3x - 10}$$

$$x - 10 + \frac{36x - 180}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$

$$\frac{(x - 10)(x^2 - 3x - 10) + 36x - 180}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$

$$\frac{x^3 - 13x^2 + 20x + 100 + 36x - 180}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$

$$\frac{x^3 - 13x^2 + 56x - 80}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$

se factorizó el numerador aplicando Ruffini.

$$\frac{(x - 4)^2 (x - 5)}{(x - 5)(x + 2)} \leq 0$$

$$\frac{(x - 4)^2}{x + 2} \leq 0$$

ceros del numerador

ceros del denominador

En $x = 4$ no hay cambio de signo.

$$\begin{aligned} x + 2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Análisis del signo de la fracción (fig. 20)

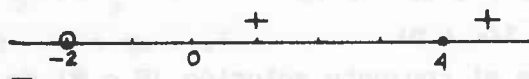


Fig. 20

Respuesta: $(-\infty; -2)$

Ejercicios (epígrafe 5)

1. Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $3,2x - 6 > 2 - 0,8x$ b) $x(x - 3) + 5 < x(x - 5) + 3$

c) $7 - \frac{7x}{2} \geq 4(3 - x)$ d) $2x - 4 + 2(x+3) > 3 + 2(x+3)$

e) $21 - 7(2x-9) > 3x$ f) $5(3 - x) - 3(x - 4) < 16x$

g) $x + \frac{2}{5}(x - 5) \leq -x + 10$

h) $3x^2 + 2x < 2x\left(\frac{3}{2}x - 1\right) + 4$

i) $\frac{2x - 1}{3} + 1 - \frac{5x}{6} < 4x + \frac{7}{2}$

j) $x - \left[\frac{3x}{4} - \left(\frac{3x}{2} + \frac{3}{10}\right)\right] > 1$

k) $(x - 4)(x + 7) - (x - 0,5) \geq x^2 + 10(x - 0,1)$

l) $\frac{1}{3}(3 - 2x - \frac{1}{6}(4 - 5x)) > \frac{1}{5}(x + 4) - 16$

2. Halla los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes inecuaciones:

- a) $x^2 - 4x - 21 > 0$ b) $3x^2 - 11x + 6 \leq 0$
 c) $(2x + 1)(2 - x) \geq 0$ d) $x^2 - 4 \leq 0$
 e) $\frac{1}{4} - x^2 > 0$ f) $4x^2 + 4x > -17$
 g) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$
 h) $(x + 5)(x - 5) \geq (3x - 1)^2 - 9x^2 - 15$
 i) $\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 > 3$
 j) $x^2 + (x + 2)(x - 2) \geq (x - 2)^2$
 k) $(x + 4)^2 - (x - 5)^2 + (x - 3)^2 > 17x + 24$
 l) $(4x - 1)(x - 2) - (2x - 1)(2x + 1) \leq 5$
 m) $x^2 + \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 < \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$
 n) $(0,1 + x)^2 - (0,1 - x)^2 \geq -x^2$
 ñ) $\frac{3x - 1}{6} - \frac{(2x + 2)(x - 5)}{8} > \frac{1}{24}$
 o) $4x^2 + 6\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 2$
 p) $x(x - 1) - 6 > x(5 - x) \quad (x > 0)$
 q) $\frac{1}{4}x^2 < 3(x + 5)$

3. Determina el conjunto solución ($S \subset \mathbb{R}$) de las inecuaciones siguientes:

- a) $\frac{x - 1}{x + 5} < 0$ b) $\frac{x^2 + x - 4}{x} < 1$
 c) $\frac{3x^2 - 5x + 2}{5 - 2x} > 0$ d) $\frac{x^3 + x^2 + x}{9x^2 - 25} \geq 0$
 e) $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0$ f) $\frac{x^2 - 10x + 24}{x - 2} > 0$
 g) $\frac{x^3 + 8x^2 + 7x}{x^2 - 8x + 9} \geq 0$ h) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2(x^2 - 4)} > 0$
 i) $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 3} > \frac{3}{x + 2}$ j) $\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} > 3$
 k) $\frac{12x + 25}{x^2 - 4} \leq -4$ l) $\frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} \leq \frac{2x - 4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$
 m) $x + \frac{49x}{x^2 + 2x} < 12$

4. ¿Cuáles son los valores de $x \in \mathbb{R}$ que cumplen la condi-

ción:

a) $(3x - 2)(2x - 3) - (2x + 1)(x + 2) + 6x > (2x - 3)^2$

b) $(4x - 3)(x + 2) > x + 2$

c) $2(x - 1) - 3(2x - 3) > 6 - 3(x + 5)$

d) $4(5x - 4)^2 \leq 144$

e) $\frac{1}{6}(2x + 24) - 0,1(x + 1) > \frac{2x}{5} - 0,3(2 - 3x)$

f) $x^3 - 2x^2 + x > 0$

g) $(2x + 3)(x - 7) - (23x - 11) \leq 2(x + 8)(x - 2)$

h) $\sqrt{6}x^2 - 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x + 2 \leq 0$

i) $\frac{5x - 1}{4} - \frac{3x - 10}{2} < \frac{x - 1}{2} - \frac{1}{3}$

j) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} > x(x - 1) + 4$

k) $x(x - 3) - 2 \leq 3x - (x^2 + 2)?$

5. ¿Será $\{-2; 1\}$ subconjunto del conjunto de todas las soluciones de las siguientes desigualdades?

a) $7x - 3(2x + 3) > 2(x - 4)$

b) $\frac{x + 1}{4} < \frac{5}{2} - \frac{1 - 2x}{3}$ c) $x^2 - 4x + 3 > 0$

d) $x(x - 1) - 6 > 5x - x^2$

e) $x(x - 3) - 2 < 3x - (x^2 + 2)$

f) $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x - 8 > 0$

g) $\frac{5x^2 - 5x}{2x^2 + 3x - 2} \leq 0$

h) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x(2x - 3) - 2} > 0$

6. Dadas las funciones $f(x) = 10 + 3x - x^2$, $g(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$ y $p(x) = 1$, determina los valores de x tales que:

a) $f(x) > 0$

b) $g(x) < 0$

c) $g(x) \geq p(x)$

7. Analiza los intervalos de monotonía y los extremos locales si existen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x$

b) $g(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9$

c) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

d) $k(x) = (3x + 1)(x - 2)$

e) $f(x) = (x + 5)(2x - 1) - 2x^2$

f) $i(x) = 3x^2 + \left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$

$$g) n(x) = \frac{2x}{9x - 1}$$

$$h) j(x) = \frac{3x^2 + 3}{5x}$$

$$i) p(x) = \frac{x^2 - 8}{x + 3}$$

$$j) m(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 2}$$

8. ¿Cuál es el dominio de las siguientes funciones?

$$a) f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$b) g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$$

$$c) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$d) p(x) = x\sqrt{2 - x^2}$$

$$e) k(x) = \log_2 \left(4 - \frac{x}{2} \right)$$

$$f) g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + 2x - 1$$

$$g) m(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$$

$$h) n(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$$

$$i) q(x) = \sqrt{\frac{6(x^2 - 1) - 5x}{x^2 - 12x + 36}}$$

$$j) h(x) = \log_2 \left(\frac{6x^2 + 7x - 3}{x^2 - 25} \right)$$

$$k) f(x) = \log \left(x - 3 - \frac{x}{x - 4} \right)$$

9. Determina todos los valores reales negativos que cumplen la condición:

$$a) x - \frac{1}{x} > 0$$

$$b) x + \frac{1}{x} > 0$$

10. ¿Qué valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \in [-1; 1]$ cumplen la condición $x^2 - 2x \geq 0$?

11. Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$a) 2^{3x-2} \geq 1$$

$$b) \log(3x + 1) \leq 0$$

$$c) \log(x^2 - 2x - 3) > 0$$

$$d) 3^{x^2 - 7x + 10} > 81$$

$$e) \log_2(2x^2 - 5x + 5) \geq 3$$

$$f) 2^{x^3 + 6x^2 + 11x} \geq \frac{1}{64}$$

12. Dadas las siguientes expresiones

$$A = \frac{x^2 - 81}{x^2 - 3x - 54} ; \quad B = \frac{4x + 8}{x^2 + x - 30} - \frac{2}{x + 6}$$

$$C = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} ; \quad D = \frac{x^2 + 6x + 9}{2x - 1}$$

determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que:

$$a) [A : B]x \geq 0$$

$$b) C : D \leq 0$$

TRIGONOMETRÍA

6. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ es una identidad si se satisface para cada x del dominio. Los números reales que no pertenecen al dominio se llaman valores inadmisibles. Las identidades más conocidas por ti son las identidades trigonométricas.

Para demostrar que una cierta igualdad es una identidad trigonométrica no existen reglas de validez general que lo permitan, no obstante te recordamos que debes tener en cuenta:

1. Iniciar la demostración por el miembro que ofrece mayor posibilidad para transformar en el otro. Si no puedes decidirte aplica el procedimiento de trabajar en ambos miembros.
2. Si es posible, utiliza la descomposición en factores y la simplificación.
3. Si no encuentras un camino propicio para empezar las transformaciones, reduce todas las funciones trigonométricas a senos y cosenos.
4. Ten en cuenta que todas las transformaciones efectuadas sean válidas en el dominio de la identidad.

Te será útil recordar algunas identidades trigonométricas que estudiaste en grados anteriores y que se consideran básicas para el trabajo con otras identidades y ecuaciones trigonométricas, las que resumimos a continuación:

$\cdot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$	$\cdot \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$
$\cdot \tan x \cdot \cot x = 1$	$\cdot \cot x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$
$\cdot \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$	$\cdot 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x}$
$\cdot \operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	
$\cdot \operatorname{sen} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \pm \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta$	
$\cdot \operatorname{cos} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$	

Ejemplo 1

Si $\sin x = \frac{3}{4}$ y $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, calcula: $\cos x$, $\tan x$, $\sin 2x$

Resolución

$$\begin{aligned} \cos x &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{16}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

como $x \in \text{II}^\circ \text{C}$ entonces $\cos x < 0$ por tanto $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2

Demuestra las siguientes identidades para los valores admisibles de la variable:

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

b) $\sin^2 x (1 + \cot^2 x) = 1$

c) $\tan \theta = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

d) $\cos \beta + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \beta\right) = 0$

Resolución

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

$$\begin{aligned} &(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \\ &= \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

b) $\sin^2 x (1 + \cot^2 x) = 1$

$$\begin{aligned} \sin^2 x (1 + \cot^2 x) &= \sin^2 x + \sin^2 x \cot^2 x \\ &= \sin^2 x + \sin^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= 1 \end{aligned}$$

c) $\tan \theta = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta\end{aligned}$$

$$d) \cos \beta + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \beta \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \beta \right) = 0$$

$$\cos \beta + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \beta \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \beta \right)$$

$$= \cos \beta + \cos \frac{2\pi}{3} \cos \beta + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \beta + \cos \frac{2\pi}{3} \cos \beta - \sin \frac{2\pi}{3} \sin \beta$$

$$= \cos \beta + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \beta$$

$$= \cos \beta \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \cos \beta \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$= \cos \beta (1 - 1) = 0 \quad \blacksquare$$

En el epígrafe 3 trabajaste ecuaciones trigonométricas sencillas. Ahora, resolverás ecuaciones trigonométricas donde es necesario aplicar identidades.

Para resolver estas ecuaciones debes tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Expresar todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo ángulo aplicando identidades.
2. Expresar todas las funciones trigonométricas en término de una sola función.
3. Resolver la ecuación haciendo transformaciones, considerando como incógnita la función trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
4. Determinar los valores de x que satisfacen las ecuaciones transformadas.

Ejemplo 3

Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones: